PROBLEME I

Analyse :

A tout réel positif ou nul m, on associe la fonction de la variable réelle x telle que :

$$f_m(x) = \text{Log} \frac{x^2 + (1 + m^2)x + 1}{\sqrt{1 + x^2}\ e^{\text{Arctg}x}}$$

1 - Déterminer le domaine de définition D de f_m selon les valeurs de m et préciser éventuellement la position des bornes de D par rapport au réel O.

2 - Déterminer les limites de f_m aux bornes de D et étudier les branches infinies de C_m, courbe représentative de f_m.

3 - Calculer la dérivée f'_m de f_m.

4 - Etudier les variations des fonctions g et h définies pour m positif ou nul par :

$$g(m) = f_m(1) \quad ; \quad h(m) = f_m(m)$$

Montrer qu'il existe un réel m_o unique, $m_o \in [\ 0,1\ ]$, tel que $g(m_o) = 0$.

Déduire de cette étude les signes respectifs de g(m) et de h(m).

5 - Donner les tableaux de variation des différentes fonctions f_m. (On pourra envisager : $m = 0$, $0 < m < 1$; $m = 1$; $m > 1$).

On précisera dans chaque cas, les valeurs de x pour lesquelles f_m admet un extremum et le signe des valeurs extrémales de f_m.

6 - Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de f_m au voisinage de $x = 0$; étudier la tangente à l'origine selon les valeurs de m.

7 - Déduire des résultats précédents un tracé aussi précis que possible des courbes C_0 et C_1.

8 - Calculer une primitive F de f_1 pour x positif ou nul.

En déduire l'aire du domaine plan défini par : $x \in [\ 0,1\ ]$; $y \in [0, f_1(x)]$

9 - Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions de l'équation en x :

$$x^2 + (m^2 + 1)x + 1 = \sqrt{1 + x^2}\ e^{\text{Arctg}x}.$$

PROBLEME II

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

On désigne par u, v, w les applications de E dans E qui au polynôme P associent respectivement les polynômes Q, R, définis par :

$$Q(x) = P(x + 1) \quad ; \quad R(x) = P(x - 1)$$

et P', polynôme dérivé de P.

1 - Montrer que u, v, w sont des endomorphismes de E.

2 - Vérifier que $uov = vou = i$ (i application identique de E). Que conclure ?

3 - Soit λ un nombre réel. On pose $f_\lambda = u + \lambda v$. Donner la matrice M_λ de f_λ dans la base canonique des polynômes de E définis par leurs images 1, x, x^2, x^3.

Déterminer suivant la valeur de λ le rang de f_λ. Calculer $(M_1)^{-1}$.

Déterminer le noyau et l'image de f_{-1}. Calculer $(f_{-1})^4$

4 - On pose $g = wo(u + v - i)$. Justifier que g est un endomorphisme de E.

5 - Montrer que la matrice de g relative à la base canonique définie ci-dessus peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & A & \\ 0 & & \\ 0 & 0\ 0\ 0 & \end{pmatrix}$$

où A est une matrice carrée inversible d'ordre 3.

Déterminer A^n pour tout entier naturel non nul n.

6 - Déterminer le noyau de g, sa dimension et le rang de g.

7 - On considère l'équation $g(P) = S$ où S est un polynôme de E de degré au plus égal à 2.

a) Montrer que cette équation a au moins une solution dans E.

b) Déterminer les polynômes P solutions de l'équation pour $S(x) = 3x^2 + 2x + 7$

8 - On désigne par E' l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée à coefficients réels. Déterminer le noyau, l'image et le rang de l'endomorphisme w relatif à E'. Quelle est la nature de w ? Que peut-on conclure ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail